通信1401刘飞

史文惠

20160417　第二章　连续系统的时域分析

P59-2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应

(1). $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$, $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=-1$.

解: $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$.

$\lambda^2+5\lambda+6=0$，其特征根为 $\lambda_1=-2$. $\lambda_2=-3$.

∴ 微分方程的齐次解为 $y_{h(t)}=C_1\cdot e^{-2t}+C_2\cdot e^{-3t}$

由于 $y(0_-)=1$. $y'(0_-)=-1$. 零输入响应激励为零.

故有 $\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=1 \\ y'_{zi}(0_+)=y'_{zi}(0_-)=-1 \end{cases}$

令 $t=0$, $\begin{cases} y_{zi}(0_+)=C_1+C_2=1 \\ y'_{zi}(0_+)=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}=-2C_1-3C_2=-1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-1. \end{cases}$

∴ $y_{zi}(t)=2\cdot e^{-2t}-e^{-3t}$ $(t\geq0)$.

(2). $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$. $y(0_-)=2$. $y'(0_-)=-2$.

解: $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0$.

$\lambda^2+2\lambda+5=0$，其特征根为 $\lambda_1=1+2j$. $\lambda_2=1-2j$.

∴ 微分方程的齐次解为 $y_{h(t)}=C_1\cdot e^{-t}\cos(2t)+C_2\cdot e^{-t}\sin(2t)$

由于零输入响应激励为零 ∴ $\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=2 \\ y'_{zi}(0_+)=y'_{zi}(0_-)=-2. \end{cases}$

令 $t=0$，$\begin{cases} y_{zi}(0_+)=C_1=2 \\ y'_{zi}(0_+)=-C_1+2C_2=-2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=0. \end{cases}$

∴ $y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$ $(t\geq0)$

20

4 - 2016

知识点总结.

一、LTI连续系统的响应.

1、微分方程的经典解.

$y(t)=\underbrace{y_{h(t)}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_{p(t)}}_{\text{强迫响应}}$

$=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_it}+y_{p(t)}$

即全解=齐次解+特解

2、关于 0_- 和 0_+ 的初始值

y_{zi}: $0_-=0_+$

y_{zs}: $0_-\neq0_+$ 且 $0_-=0$

3、零输入响应和零状态响应

(1) y_{zi}: 激励为零

(2) y_{zs}: 初始状态为零. 仅由输入信号 $f(t)$ 所引起的反应

LTI系统的全响应:

$y(t)=y_{zi(t)}+y_{zs(t)}$

系统的自由响应包含 y_{zi} 和 y_{zs} 的一部分

小知识点

LTI 系统响应

自由响应+强迫响应

$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

零输入响应+零状态响应

$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

经典求解

(1) 零输入响应

$y_{zi}=\sum_{j=1}^{n} C_{zij}\, e^{\lambda_j t}$

零输入响应在 $0_+ > 0$

C_{zij} 由 $y_{zi}^{(j)}(0_+)=y_{zi}^{(j)}(0_-)=y^{(j)}(0_-)$ 确定

齐次线性微分方程通解

异实根 $C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$

重实根 $(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$

复根 $\alpha\pm\beta j$ $e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$

姓名：谭星　　班级：电子1404　　学号：201414077

第二章　连续系统的时域分析

2-1. 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应。

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

解：(1) $\lambda^2+5\lambda+6=0$

$(\lambda+3)(\lambda+2)=0$　特征根 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=-2$

$y_{zi}(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{-2t}$

$\because y(0_-)=y'(0_-)=1$

$\therefore y_{zi}(0)=y_{zi}'(0_-)=1$　即 $\begin{cases}C_1+C_2=1\\-3C_1-2C_2=1\end{cases}$　计得 $\begin{cases}C_1=-1\\C_2=2\end{cases}$

$\therefore y_{zi}(t)=-e^{-3t}+2e^{-2t}$，$t\geq 0$

(2) $\lambda^2+2\lambda+5=0$

$\lambda=-1\pm 2i$

$y_{zi}(t)=e^{-t}[C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)]$

$\because y_{zi}(0_-)=2$，$y_{zi}'(0_-)=-2$

$\therefore \begin{cases}C_1=2\\-C_1+2C_2=-2\end{cases}$　计得 $\begin{cases}C_1=2\\C_2=0\end{cases}$

$\therefore y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$，$t\geq 0$

(3) $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda+1)^2=0$　特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$

$y_{zi}(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$

$\because y_{zi}(0_-)=1$，$y_{zi}'(0_-)=$

$\therefore \begin{cases}C_1=1\\-C_1+C_2=1\end{cases}$　计得 $\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$

$\therefore y_{zi}(t)=(1+2t)e^{-t}$，$t\geq 0$

20

4-2016

电子1402班 李妍

2014014107

知识点归纳

① 描述LTI连续系统激励与响应之间关系的数学模型是n阶常系数线性微分方程，它可写为

$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f^{(1)}(t)+b_0 f(t)$

② 微分方程的全解由齐次解（自由函数）$y_h(t)$ 加特解 $y_p(t)$ 组成，

即 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

③ 当微分方程等号右端含有冲激函数及其各阶导数时，响应 $y(t)$ 及其各阶导数由 0_- 到 0_+ 的瞬间将发生跃变。可按下述步骤由 0_- 值求得 0_+ 值。

<1> 将输入 $f(t)$ 代入微分方程，如等号右端含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数，根据微分方程等号两端各奇异函数的系数相等的原理，判断方程左端 $y(t)$ 的最高阶导数所含 $\delta(t)$ 导数的最高阶次。

<2> 令 $y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$，对 $y''(t)$ 进行积分（从 $-\infty$ 到 t），逐次求得 $y'(t)$ 和 $y(t)$

<3> 将 $y''(t)$，$y'(t)$ 和 $y(t)$ 代入微分方程，根据等号两端各奇异函数的系数相等，从而求得 $y''(t)$ 中的各待定系数。

<4> 分别对 $y'(t)$ 和 $y''(t)$ 等号两

习题 2

2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应。

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$。

解：此微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$。其特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$。

则系统的零输入响应可写为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$。

将初始状态 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$，$y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)=1$ 代入上式得

$\begin{cases}C_1+C_2=1\\-2C_1-3C_2=-1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=2\\C_2=-1\end{cases}$ ∴系统的零输入响应为

$y_{zi}(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}\ (t\geq 0)$.

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$。

解：此微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$。其特征根为 $\lambda=-1\pm 2j$。

则系统的零输入响应可写为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}\cos(2t)+C_2e^{-t}\sin(2t)$。

将初始状态 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2$，$y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)=-2$ 代入上式得

$\begin{cases}C_1=2\\-C_1+2C_2=-2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=2\\C_2=0\end{cases}$ ∴系统的零输入响应为

$y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$，$t\geq 0$.

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

解：此微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，其特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$。

则系统的零入响应为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$

将初始状态 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$，$y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)=1$ 代入上式，得

$\begin{cases}C_1=1\\-C_1+C_2=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$ ∴系统的零输入响应为

$y_{zi}(t)=e^{-t}+2te^{-t}$，$t\geq 0$.

2.2 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其 0_+ 值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$。

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$，$f(t)=\varepsilon(t)$.

解：由题得 $f(t)=\varepsilon(t)$，方程右端不含冲激函数项，则 $y(t)$ 及其导数在 $t=0$ 时不发生跃变。

∴ $y(0_+)=y(0_-)=1$，$y'(0_+)=y'(0_-)=1$

(2) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f''(t)+f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$，$f(t)=\delta(t)$.

解：将 $f(t)=\delta(t)$ 代入微分方程得 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=\delta''(t)+\delta(t)$ ①

设 $y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_1(t)$，对其积分得 ②

$y'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+r_2(t)$，$r_2(t)=c\varepsilon(t)+r_1^{(-1)}(t)$ ③

对其积分得 $y(t)=a\delta(t)+r_3(t)$ ④

将式②③④代入①式中得

$a\delta''(t)+(b+4a)\delta'(t)+(c+4b+3a)\delta(t)+r_1(t)+4r_2(t)+3r_3(t)=\delta''(t)+\delta(t)$

则 $\begin{cases}a=1\\b+4a=0\\c+4b+3a=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=14\end{cases}$ 对式③两端从 0_- 到 0_+ 积分得

$y'(0_+)-y'(0_-)=c=14$

∴ $y'(0_+)=y'(0_-)+14=12$

对式④两端从 0_- 到 0_+ 积分得 $y(0_+)-y(0_-)=b=-4$

∴ $y(0_+)=y(0_-)-4=-2$

即其 0_+ 值为 $y(0_+)=-2$，$y'(0_+)=12$.

20

4-2016

知识点：

1. 0输入响应 $y_{zi}(t)$：激励为0时仅由系统的初始状态 $x(0)$ 引起的响应。

由于输入为0，故初始值 $y_{zi}^{(j)}(0_+)=y_{zi}^{(j)}(0_-)=y^{(j)}(0)$。

2. 不同特征根所对应的齐次解：

特征根λ	齐次解 $y_h(t)$
单实根	$e^{\lambda t}$
r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos\beta t+D\sin\beta t]$ 或 $Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$，$Ae^{j\theta}=C+jD$

2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其0输入响应。

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$　$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$.

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

解(1). 微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$.

解得其特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$. 则系统的0输入响应可写为：$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

又 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$. $y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)=1$. 代入上式有：

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\-(2C_1+3C_2)=-1.\end{cases}$$

解得：$C_1=2$；$C_2=-1$.

则系统的0输入响应为 $y_{zi}(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}$　$t\geq0$.

解(2) 微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$.

其特征根为 $\lambda_1=-1+2j$，$\lambda_2=-1-2j$. 系统的0输入响应可写为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}\cos(2t)+C_2e^{-t}\sin(2t)$

将初始状态 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2$. $y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)=-2$ 代入上式得：

$$\begin{cases}y_{zi}(0_-)=C_1=2.\\y'_{zi}(0_-)=-C_1+2C_2=-2\end{cases}$$

解得 $C_1=2$，$C_2=0$.

因此系统的0输入响应为 $y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$ $(t\geq0)$

解(3) 微分方程对应的特征方程为：

$\lambda^2+2\lambda+1=0$. 其特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

系统的零输入响应可写为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$ ①

又 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$. $y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)=1$

将它们代入到①式中有：

$$\begin{cases}y_{zi}(0_-)=C_1=1\\y'_{zi}(0_-)=-C_1+C_2=1.\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}C_1=1\\C_2=2.\end{cases}$$

因此系统的0输入响应为：

$y_{zi}(t)=e^{-t}+2te^{-t}$　$t\geq0$.

20 五

4—2016

通信402班
柳雨婷

$y_{zi}(t)$零输入响应
$y_{zi}^{(n)}(t)+a_{n-1}y_{zi}^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0 y_{zi}(t)=0$
$\therefore y_{zi}=\sum_{j=1}^{n}C_{zij}e^{\lambda_j t}$

$y_{zs}(t)$零状态响应
$y_{zs}(t)=\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_j t}+y_p(t)$

$y(t)$全响应
$y(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j e^{\lambda_j t}+y_p(t)$
$=\sum_{j=1}^{n}C_{zij}e^{\lambda_j t}+\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_j t}+y_p(t)$

$\begin{cases} y_{zi}: 0=0_+ \\ y_{zs}: 0\neq 0_+,\ 0=0 \end{cases}$

2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应

1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$, $y(0_-)=1$ $y'(0_-)=-1$

解：微分方程对应的特征方程为

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

其特征根为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$. 系统的零输入响应可写为

$$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

又 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$, $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-1$ 则有 $\begin{cases}1=C_1+C_2\\ -1=-2C_1-3C_2\end{cases}$

$\therefore C_1=2,\quad C_2=-1$

即系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}$, $t\geq 0$

2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$, $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=-2$

解：微分方程对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

其特征根为 $\lambda_{1,2}=-1\pm j2$, 系统的零输入响应可写为

$$y_{zi}(t)=C_1e^{-t}\cos(2t)+C_2e^{-t}\sin(2t)$$

又 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2$, $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2$

$\therefore \begin{cases}C_1+C_2=2\\ -C_1-C_2=-2\end{cases}$

$\therefore C_1=2,\quad C_2=0$

$\therefore$ 系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$, $t\geq 0$

3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$, $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=1$

解：微分方程对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

其特征根为 $\lambda_{1,2}=-1$, 系统的零输入响应可写为

$$y_{zi}(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$$

又 $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$, $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=1$

$\therefore y_{zi}(0_-)=C_1=1$ $y_{zi}'(0_-)=-C_1+C_2=1$

$\therefore C_1=1,\ C_2=2$

$\therefore$ 系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=(1+2t)e^{-t}$, $t\geq 0$

2.2 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其0_+值 $y(0_+)$和$y'(0_+)$

1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$, $y(0_-)=1$, $y'(0_-)=1$, $f(t)=\varepsilon(t)$

解：输入 $f(t)=\varepsilon(t)$, 则方程右端不含冲激函数，则 $y(t)$及其导数在 $t=0$处均不发生跃变，即 $y(0_+)=y(0_-)=1$, $y'(0_+)=y'(0_-)=1$

20

4-2016

~~通信1402.~~

张泽同

习题2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应。

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$ $y(0_-)=1$ $y'(0_-)=-1$

解：微分方程对应的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$

其特征根为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$. 系统零输入响应为

$$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

又∵ $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$ $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-1$ 则 $\begin{cases}C_1+C_2=1\\-2C_1-3C_2=-1\end{cases}$

$y_{zi}(t)$ 零输入响应

∴ $C_1=2$, $C_2=-1$

$y_{zi}^{(n)}(t)+a_{n-1}y_{zi}^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y_{zi}(t)=0$

∴零输入响应 $y_{zi}(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}$, $t\geq0$

∴ $y_{zi}=\sum_{j=1}^{n}C_{zij}e^{\lambda_jt}$

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$, $y(0_-)=2$ $y'(0_-)=-2$

解：对应的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$ $\lambda_{1,2}=-1\pm2j$

$y_{zs}(t)$ 零状态响应

零输入响应 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}\cos(2t)+C_2e^{-t}\sin(2t)$

$y_{zs}(t)=\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_jt}+y_p(t)$

又∵ $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2$ $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2$

∴ $\begin{cases}C_1+C_2=2\\-C_1-C_2=-2\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}C_1=2\\C_2=0\end{cases}$ ∴零输入响应为 $y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$ $t\geq0$

$y(t)$ 全响应

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$; $y(0_-)=1$ $y'(0_-)=1$

$y(t)=\sum_{j=1}^{n}C_je^{\lambda_jt}+y_p(t)$

解：特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ 特征根为 $\lambda_{1,2}=-1$

$=\sum_{j=1}^{n}C_{zij}e^{\lambda_jt}+\sum_{j=1}^{n}C_{zsj}e^{\lambda_jt}+y_p(t)$

零输入响应为 $y_{zi}(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$

又∵ $y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$ $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=1$

∴ $y_{zi}(0_-)=C_1=1$ $y_{zi}'(0_-)=-C_1+C_2=1$ ∴ $C_1=1$ $C_2=2$

$\begin{cases}y_{zi}: 0_-=0_+\\y_{zs}: 0_-\neq0_+\end{cases}$ $0_-=0$

∴ $y_{zi}(t)=(1+2t)e^{-t}$, $t\geq0$

2.2 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其 0_+ 值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$. $y(0_-)=1$. $y'(0_-)=1$. $f(t)=\varepsilon(t)$

解：输入 $f(t)=\varepsilon(t)$，则方程右端不含冲激函数项

∴ $y(t)$ 及其导数在 $t=0$ 处均不发生跃变

∴ $y(0_+)=y(0_-)=1$ $y'(0_+)=y'(0_-)=1$

20

4 — 2016

通信1401
常阳
2014170006

知识点总结
① 齐次解的形式由特征根决定
r 重实根(2根) $y_h(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$
$y_h(t)=e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$
单实根 $y_h(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$
② 特解求法。
例：$f(t)=2e^{-t}$
设特解为 $y_p(t)=Pe^{-t}$
例 $f(t)=10\cos t$，
设 $y_p(t)=P\cos t+Q\sin t$
1) 设 $y_p(t)$
2) 求出 $y_p'(t)$，$y_p''(t)$，
3) 代入原式，求出 P。
③ 全解求法
$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
代入已知条件，可求出待定系数

例 2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应。

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$

解：微分方程对应的特征方程为

$$\lambda^2+5\lambda+6=0.$$

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$。

系统的零输入响应可写为，$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

$y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$，$y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-1$，则

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\-1=-2C_1-3C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\\C_2=-1\end{cases}$$

$\therefore$ $y_{zi}(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}$，$t\geq0$

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$

解：微分方程对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+5=0.$$

特征根为 $\lambda_1=-1+2j$，$\lambda_2=-1-2j$

系统的零输入响应可写为 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}\cos(2t)+C_2e^{-t}\sin(2t)$

$y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2$，$y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2$。则

$$\begin{cases}2=C_1\\-C_1+2C_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\\C_2=0\end{cases}$$

$\therefore$ $y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$，$t\geq0$

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

解：微分方程的对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$。

系统的零输入响应为 $y_{zi}(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$

$y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$，$y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=1$。则

$$\begin{cases}C_1=1\\-C_1+C_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$$

$\therefore$ $y_{zi}(t)=(1+2t)e^{-t}$，$t\geq0$

通信1401
常阳
201417006

20 王
4-2016

通信1401
张宇晴
201417048

$y_{zi}(t)$ 零输入响应

$y_{zi}^{(n)}(t)+a_{n-1}y_{zi}^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y_{zi}(t)=0$

$y_{zi}=\sum_{j=1}^{n}C_{zij}e^{\lambda_j t}$

零输入响应的 $0_+=0_-$

C_{zij} 由 $y_{zi}^{(j)}(0_-)=y^{(j)}(0_-)$ 确定

特征根 λ_1,λ_2

$\Delta<0$ 时

$\lambda_1=\lambda_2=\alpha\pm j\beta$

$y=e^{\alpha t}[C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)]$

$\Delta=0$ 时 $\lambda_1=\lambda_2$

$y=C_1e^{\lambda t}+C_2te^{\lambda t}$

冲激函数匹配法

$b_1y''(t)+b_2y'(t)+b_3y(t)=b_4\delta''(t)+b_5\delta(t)$

0 时刻方程两端 $\delta(t)$ 及其各阶导数相等

$y_{zs}''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\,\delta(t)+r_0(t)$

$y_{zs}'=a\delta'(t)+b\delta(t)+\underbrace{c+\int_{-\infty}^{t}r_0(\tau)d\tau}_{r(t)}$

$y_{zs}=a\delta(t)+b+\underbrace{\int_{-\infty}^{t}r_1(\tau)d\tau}_{r_1(t)}$

$y_{zs}'(0_-)=0$ $y_{zs}'(0_+)-y_{zs}'(0_-)=c$

$y_{zs}'(0_+)=c$

$y_{zs}(0_-)=0$

$y_{zs}(0_+)-y_{zs}(0_-)=b$

$y_{zs}(0_+)=b$

$(0_-,0_+)$ 区间 $\delta'(t)$、$\delta(t)$、$r_0(t)$ 积分均为0

P71 2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$

解：$y_{zi}''(t)+5y_{zi}'(t)+6y_{zi}(t)=0$ 特征根：$-2,-3$ $\therefore y_{zi}=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$ $y_{zi}'=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}$

$y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2C_1-3C_2=-1$ $y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=C_1+C_2=1$

$\therefore C_1=2$，$C_2=-1$ $\therefore y_{zi}=2e^{-2t}-e^{-3t}$ $t>0$

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$

解：$\lambda^2+2\lambda+5=0$ $\Delta=4-20<0$ $\lambda_1,\lambda_2=-1\pm2j$ $\therefore y_{zi}=e^{-t}[C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)]$

$\because y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2$ $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2$ $\therefore y_{zi}'=-e^{-t}[C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)]+e^{-t}[-2C_1\sin(2t)+2C_2\cos(2t)]$

$\therefore\begin{cases}C_1=2\\-C_1+2C_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}C_1=2\\C_2=0\end{matrix}$ $\therefore y_{zi}=2e^{-t}\cos(2t)$ $t>0$

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

解：$\lambda^2+2\lambda+1=0$ $\lambda_1=\lambda_2=-1$ $y_{zi}=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$ $y_{zi}'=-C_1e^{-t}+C_2e^{-t}-C_2te^{-t}$

$y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$ $y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=1$ $\therefore C_1=1$ $-C_1+C_2=1$ $C_2=2$

$\therefore y_{zi}=e^{-t}+2te^{-t}$ $t>0$

2.2 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其 0_+ 值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$，$f(t)=\varepsilon(t)$

解：$f(t)=\varepsilon(t)$ 方程右端不含冲激函数项，则 $y(t)$ 及其导数在 $t=0$ 处均不发生跃变。

$\therefore y(0_+)=y(0_-)=1$ $y'(0_+)=y'(0_-)=1$

(3) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f''(t)+f(t)$，$y(0_-)=2$ $y'(0_-)=-2$，$f(t)=\delta(t)$

解：$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=\delta''(t)+\delta(t)$

$y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$ $y'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c+\int_{-\infty}^{t}r_0(\tau)d\tau$

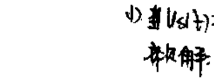
$y(t)=a\delta(t)+b+r_1(t)$ $r_1(t)=c+\int_{-\infty}^{t}r_0(\tau)d\tau$

$\therefore a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+4[a\delta'(t)+b\delta(t)+c]+3[a\delta(t)+b]=\delta''(t)+\delta(t)$

$\therefore\begin{cases}a=1\\4a+b=0\\c+4b+3a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=1\\b=-4\\c=14\end{matrix}$ $\therefore y'(0_+)-y'(0_-)=c$ $y'(0_+)=14-2=12$

$y(0_+)-y(0_-)=b$ $y(0_+)=-4+2=-2$

2.3 RC 电路中，已知 $R=1\Omega$，$C=0.5F$，电容的初始状态 $u_C(0_-)=-1V$，试求激励电压源 $u_s(t)$ 为下列函数时电容电压的全响应 $u_C(t)$。



(1) $u_s(t)=\varepsilon(t)$ (2) $u_s(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$

解：由电路：$u_C(t)+RC\dfrac{du_C(t)}{dt}=u_s(t)$ 代入数据得：$u_C'(t)+2u_C(t)=2u_s(t)$

(1) 当 $u_s(t)=\varepsilon(t)$ 时，$u_C'(t)+2u_C(t)=2\varepsilon(t)$ $\because$ 方程右边不含冲激项 $\therefore u_C(0_+)=u_C(0_-)=-1$

齐次解：$u_{Ch}(t)=C_1e^{-2t}$ 特解：$u_{Cp}(t)=1$ $t\geq0$

$\therefore$ 全解：$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)$

$=C_1e^{-2t}+1$ $t\geq0$

20
4-2016